RIMS Kôkyûroku Bessatsu
B68 (2017), 135–148

Positive characteristic multizeta values and their algebraic independence

By

Yoshinori MISHIBA*

Abstract

In this paper, we give an introduction to the positive characteristic multizeta values. We state several results of their relations and linear/algebraic independence and an interpretation as periods of t-motives. We also sketch how we prove algebraic independence results.

§ 1. 導入

本稿では，正標数多重ゼータ値について概説し，それらの間の関係式及び独立性に関して知られている結果を述べる．また，ある種の正標数多重ゼータ値に対して，代数的独立性がどのように証明されるかについて解説をする．なお，正標数多重ゼータ値については [7] において素晴らしい解説が書かれているので，そちらも参照されたい．

$A := \mathbb{F}_q[\theta]$ を位数 q の有限体上の一変数多項式環，$K := \mathbb{F}_q(\theta)$ をその商体，$K_\infty := \mathbb{F}_q(\!(\theta^{-1})\!)$ を K の無限素点における完備化，$\mathbb{C}_\infty$ を K_∞ の代数閉包の完備化とし，$|-|_\infty$ を $\mathbb{C}_\infty$ 上の乗法付値とする．K の代数閉包 $\overline{K}$ を $\mathbb{C}_\infty$ の中にとる．また，$p > 0$ をその標数とする．これらは標数 0 における $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ 及び $\overline{\mathbb{Q}}$ の函数体類似である．正の整数からなるインデックス $\underline{n} = (n_1, \ldots, n_d)$ に対して，**正標数多重ゼータ値** (**positive characteristic multizeta values**) は 2002 年の Arizona Winter School において Thakur によって以下のように定義された：

$$\zeta(\underline{n}) = \zeta(n_1, \ldots, n_d) := \sum_{a_1, \ldots, a_d} \frac{1}{a_1^{n_1} \cdots a_d^{n_d}} \in K_\infty.$$

Received November 1, 2013. Revised August 1, 2016.
2010 Mathematics Subject Classification(s): 11J93 (Primary) 11M38, 11G09 (Secondary)
Key Words: *positive characteristic multizeta values, algebraic independence, t-motives.*
This work was supported by the JSPS Research Fellowships for Young Scientists.
*Department of General Education, National Institute of Technology, Oyama College, 771 Nakakuki, Oyama-city, Tochigi, 323-0806, JAPAN.
e-mail: `mishiba@oyama-ct.ac.jp`

ここで，$a_1, \ldots, a_d \in A$ はモニックな多項式で $\deg a_1 > \cdots > \deg a_d$ を満たすもの全体を走る．Thakur は，Artin-Weil ゼータ函数の特殊値の一般化として，$\mathbb{R}$ に値を持つものも同時に扱っていたが，ここでは扱わない．詳しくは [16, Section 5.10] を参照．**本文書では一貫して，上記のものを正標数多重ゼータ値，古典的な標数 0 における通常のものを多重ゼータ値と呼び，記号をそれぞれ ζ 及び $\zeta_{\mathbb{Z}}$ として使い分ける．** $\zeta(\underline{n})$ (或いは $\underline{n}$) に対して，$n_1 + \cdots + n_d$ を重さ，d を深さという．標数 0 のときとは異なり，$n_1 = 1$ でも収束することに注意する．深さが 1 のときは特に **Carlitz ゼータ値**と呼ばれ，Carlitz ([5]) によってその性質が調べられていた．また，その場合は Goss ([10]) によって $K_\infty^\times \times \mathbb{Z}_p$ 上の函数に解析接続されている．$\zeta(\underline{n})$ は任意の $\underline{n}$ に対して 0 でないことが Thakur ([17]) によって示されているが，これは深さが 1 より大きいときは自明なことではない．多重ゼータ値と同様に，正標数多重ゼータ値の間の K 或いは $\overline{K}$ 上の関係式や独立性が基本的な興味の対象となっている．正標数多重ゼータ値の間には，多重ゼータ値の間の関係式の類似が成り立つ場合と成り立たない場合がある．また，正標数特有の関係式も存在する．現在のところ，関係式については多重ゼータ値ほど豊富な結果は得られていない．一方で独立性については，標数 0 の世界では手の届きそうにない問題に対してまで，その類似がいくつか示されている．例えば，各重さごとの正標数多重ゼータ値の張る空間の直和性や,「奇」数点における代数的独立性などが示されている．正標数多重ゼータ値は t モチーフと呼ばれる対象の周期として現れる．このような周期に対する ABP 判定規準 ([2]) や Papanikolas の理論 ([15]) などを用いることで，種々の独立性が示される．

本稿では，まず 2 節において正標数多重ゼータ値の間に成り立つ関係式について述べる．そして 3 節では，正標数多重ゼータ値の間の線型・代数的独立性について知られている結果を述べる．続く 4 節では t モチーフを導入し，正標数多重ゼータ値がどのようにして周期として現れるかについて見る．また，Papanikolas の理論を概説し，t モチーフの周期が生成する体の超越次数が，ある代数群の次元で捉えられることを述べる．最後の 5 節において，具体的な代数的独立性の証明をいくつかの場合に紹介する．

謝辞．　本稿は，2013 年に行われた RIMS 研究集会「多重ゼータ値の諸相」において，筆者が行った講演を元に作成したものです．講演する機会を与えて下さった井原健太郎先生及び聴講して下さった皆様に感謝致します．筆者は日本学術振興会より援助を受けています (特別研究員 DC2).

§ 2.　正標数多重ゼータ値の間の関係式

この節では，正標数多重ゼータ値の間に成り立つ関係式について述べる．関係式の存在については，まだまだ多重ゼータ値ほど詳しくは知られていないが，基本的な文献として [18]，[19] が挙げられる．

Euler-Carlitz 関係式

深さ 1 の正標数多重ゼータ値，つまり Carlitz ゼータ値においては，まず以下のようなことが知られている．$\overline{K}$ において $-\theta$ の $q-1$ 乗根を固定し，

$$\widetilde{\pi} := (-\theta)^{\frac{q}{q-1}} \prod_{i=1}^{\infty} \left(1 - \theta^{1-q^i}\right)^{-1} \in (-\theta)^{\frac{1}{q-1}} \cdot K_\infty^\times$$

と定義する．$\widetilde{\pi}$ は Carlitz t 加群と呼ばれるものの基本周期 (指数写像の核の生成元) となっており，標数 0 における $\mathbb{G}_m$ の基本周期 $2\pi\sqrt{-1}$ の類似物である ([11, Section 3] 参照)．Carlitz は [5] において，$n \geq 1$ が $q-1$ の倍数であるときに

$$\frac{\zeta(n)}{\widetilde{\pi}^n} = \frac{B_n}{\Gamma_{n+1}} \in K^\times$$

であることを示している．ここで，$\Gamma_{n+1} \in A$ は階乗の類似物，$B_n \in A$ は Bernouli-Carlitz 数と呼ばれる Bernouli 数の類似物であり，それぞれ次のように定義される．非負整数 $i \geq 0$ に対し，

$$D_i := \prod_{j=0}^{i-1} (\theta^{q^i} - \theta^{q^j})$$

とする．非負整数 $n \geq 0$ の q 進展開 $n = \sum_i n_i q^i$ $(0 \leq n_i < q)$ に対して

$$\Gamma_{n+1} := \prod_i D_i^{n_i}$$

である．また，

$$\exp_C(z) := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{z^{q^i}}{D_i}$$

とおく．これは前述した Carlitz t 加群の指数写像である．このとき $B_n \in A$ を

$$\frac{z}{\exp_C(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{z^n}{\Gamma_{n+1}}$$

により定義する．

これらは標数 0 における偶数点での Euler の関係式の類似である．そのため，n が $q-1$ で割り切れるときに n は**「偶」数**，割り切れないときに n は**「奇」数**であるなどという．正標数においては逆に n が $q-1$ で割り切れないときには，$\zeta(n), \zeta(n)/\widetilde{\pi}^n \notin \overline{K}$ であることが Yu ([20]) により，さらに $\widetilde{\pi}$ と $\zeta(n)$ が $\overline{K}$ 上代数的独立であることが Chang と Yu ([8]) によって示されている．彼らはもっと一般に，Carlitz ゼータ値の間には,「偶」数点における Euler-Carlitz 関係式と，次に述べる p 乗 Frobenius 関係式しか $\overline{K}$ 乗の関係がないことを示している (定理 3.1).

p 乗 Frobenius 関係式

正の整数からなるインデックス $\underline{n} = (n_1, \ldots, n_d)$ と非負整数 $e \geq 0$ に対して，各成分を p^e 倍したインデックスを $p^e\underline{n} := (p^e n_1, \ldots, p^e n_d)$ とおく．定義から明らかに

$$\zeta(p^e\underline{n}) = \zeta(\underline{n})^{p^e}$$

が成り立つ．これは p 乗 Frobenius 関係式と呼ばれ，正標数特有の関係式である．

調和積・シャッフル積

正の整数 $w \geq 1$ に対して，

$$\overline{\mathcal{Z}}_w := \langle \zeta(n_1, \ldots, n_d) | n_1 + \cdots + n_d = w \rangle_{\overline{K}} \subset \mathbb{C}_\infty$$

を重さ w の正標数多重ゼータ値が $\overline{K}$ 上張る空間とする．また，$\overline{\mathcal{Z}}_0 := \overline{K}$ とする．次の定理 2.1 から特に，任意の $w, w' \geq 0$ に対して $\overline{\mathcal{Z}}_w \cdot \overline{\mathcal{Z}}_{w'} \subset \overline{\mathcal{Z}}_{w+w'}$ が成り立つ．

定理 2.1 ([19, Theorem 3])**.** 正の整数からなるインデックス $\underline{n}$ と $\underline{n}'$ をとり，w と w' をそれぞれの重さ，d と d' をそれぞれの深さとする．このとき，重さ $w + w'$ で深さ $d + d'$ 以下の各インデックス $\underline{m}$ に対して，$\underline{n}$ と $\underline{n}'$ から計算可能なある $f_{\underline{m}} \in \mathbb{F}_p$ が存在して，シャッフル積

$$\zeta(\underline{n})\zeta(\underline{n}') = \sum_{\underline{m}} f_{\underline{m}} \zeta(\underline{m})$$

が成り立つ．

[12] において定理 2.1 の具体的な表示について述べられている．正標数多重ゼータ値の間には一般に調和積公式は成り立たないので，定理 2.1 は自明なことではない．例えば，深さ 1 同士の積は

$$\begin{aligned}
\zeta(n_1)\zeta(n_2) &= \left(\sum_{a_1} \frac{1}{a_1^{n_1}}\right)\left(\sum_{a_2} \frac{1}{a_2^{n_2}}\right) \\
&= \left(\sum_{\deg a_1 > \deg a_2} + \sum_{\deg a_1 < \deg a_2} + \sum_{\deg a_1 = \deg a_2}\right) \frac{1}{a_1^{n_1} a_2^{n_2}} \\
&= \zeta(n_1, n_2) + \zeta(n_2, n_1) + \sum_{\deg a_1 = \deg a_2} \frac{1}{a_1^{n_1} a_2^{n_2}}
\end{aligned}$$

となるが，一般に 3 項目は $\zeta(n_1 + n_2)$ とは異なる．[18, Theorem 2] には，実際に調和積公式が成り立たない例が書かれている．しかし，Thakur はインデックスが q に比べて小さいときには調和積公式が成り立つことを示した (実際にはもっと多くの状況で述べている．また，[16, Theorem 5.10.6] も参照)．

定理 2.2 ([18, Theorem 1]). $n_1+n_2\leq q$ のとき，調和積公式

$$\zeta(n_1)\zeta(n_2)=\zeta(n_1,n_2)+\zeta(n_2,n_1)+\zeta(n_1+n_2)$$

が成り立つ．

反復積分によるシャッフル積公式の単純な類似も成り立たない．例えば，シャッフル積公式 $\zeta_{\mathbb{Z}}(2)^2=2\zeta_{\mathbb{Z}}(2,2)+4\zeta_{\mathbb{Z}}(3,1)$ を考えてみると，$p=2$ のときに右辺に相当する部分は 0 となってしまい，明らかに成り立たない．また，修正したものが存在するかどうかも知られていない．

Thakur は [18] において，q を 2 や 3 にしたときに様々な関係式を求めている．しかし，それらの一般の q に対する拡張や，複シャッフル関係式などに相当する強力な関係式はまだ知られていない．また，和公式の単純な類似も成り立たないことが知られている．これは例えば，$\zeta(3)\neq\zeta(2,1)$ となることが $|\zeta(3)|_\infty=1$ 及び $|\zeta(2,1)|_\infty<1$ であることから直ちに従う．但し，$q=3$ のときには似たような等号 $\zeta(3)/(\theta-\theta^3)=\zeta(1,2)$ が成り立つ ([18, Theorem 5])．

§ 3. 正標数多重ゼータ値の間の線型・代数的独立性

前節で見たように，正標数多重ゼータ値の間の関係式はまだ十分には知られていない．一方で，線型・代数的独立性については，多くとは言えないがいくつかのことが示されている．この節では，独立性について知られている結果を述べる．

まず,「奇」数点における Carlitz ゼータ値に対しては，Chang と Yu ([8]) による次の著しい結果がある：

定理 3.1 ([8, Corollary 4.6]). $n_1,\dots,n_d\geq 1$ を $q-1$ で割れない正の整数で，$i\neq j$ ならば n_i/n_j が p の冪でないものとする．このとき，$\widetilde{\pi},\zeta(n_1),\dots,\zeta(n_d)$ は $\overline{K}$ 上代数的独立である．

この定理と前節の Euler-Carlitz 関係式及び p 上 Frobenius 関係式により，Carlitz ゼータ値の間の $\overline{K}$ 上の関係式が全て決定されたことになる．深さが 2 以上の正標数多重ゼータ値に対しては，まず次の強力な結果が Chang ([6]) によって示されている：

定理 3.2 ([6, Theorem 2.2.1]). 重さの異なる正標数多重ゼータ値の間には，非自明な $\overline{K}$ 上の線型関係式は存在しない．つまり

$$\sum_{w\geq 0}\overline{\mathcal{Z}}_w=\bigoplus_{w\geq 0}\overline{\mathcal{Z}}_w$$

が成り立つ．さらに，全ての $\overline{K}$ 上の関係式は K 上の斉次関係式から得られる．つまり，インデックス $\underline{n}_1,\dots,\underline{n}_r$ に対して，代入写像

$$\overline{K}[X_1,\dots,X_r]\to\mathbb{C}_\infty;\ f\mapsto f(\zeta(\underline{n}_1),\dots,\zeta(\underline{n}_r))$$

の核は K 係数の斉次多項式で生成される．但し，各 i に対して変数 X_i の次数をインデックス $\underline{n}_i$ の重さで定義する．

定理 3.1 と 3.2 では，深さが 2 以上の正標数多重ゼータ値を含む代数的独立性については何も言っていない．これについては，まず次の定理がある：

定理 3.3 ([13, Theorem 1.1])． $n \geq 1$ を $q-1$ で割れない正の整数とする．このとき，$\widetilde{\pi}, \zeta(n), \zeta(n,n)$ は $\overline{K}$ 上代数的独立であるか，または関係式 $\zeta(n)^2 - 2\zeta(n,n) \in K^{\times} \cdot \widetilde{\pi}^{2n}$ を満たす．もし $2n$ が $q-1$ で割れないならば，前者となる．

多重ゼータ値については，常に調和積公式が成り立つことと $2n$ が偶数であることから

$$\zeta_{\mathbb{Z}}(n)^2 - 2\zeta_{\mathbb{Z}}(n,n) = \zeta_{\mathbb{Z}}(2n) \in \mathbb{Q}^{\times} \cdot \pi^{2n}$$

となり，定理内の関係式の類似が常に成立する．そのため，定理 3.3 もある意味で正標数特有の結果と言える．

インデックス $\underline{n} = (n_1, \ldots, n_d)$ を固定し，

$$I(\underline{n}) := \{(n_k, n_{k+1}, \ldots, n_l) | 1 \leq k \leq l \leq d\}$$

とおく．$I(\underline{n})$ は $\underline{n}$ の「部分」インデックスのうち，順序を保ち番号に飛びがないもの全体から成る．

定理 3.4 ([14])． $n_1, \ldots, n_d \geq 1$ が $q-1$ で割れず，$i \neq j$ ならば n_i/n_j は p の冪ではないとする．このとき，集合

$$\{\widetilde{\pi}\} \cup \{\zeta(\underline{n}') | \underline{n}' \in I(\underline{n})\}$$

の全ての元は $\overline{K}$ 上代数的独立である．

定理 3.1 より，定理 3.4 の仮定は $\widetilde{\pi}, \zeta(n_1), \ldots, \zeta(n_d)$ が $\overline{K}$ 上代数的独立であることと同値であることに注意する．次に p 冪倍に関する仮定を弱めることを考える．2 つのインデックス $\underline{n}', \underline{n}'' \in I(\underline{n})$ に対して，$\underline{n}'$ の深さと $\underline{n}''$ の深さが等しく，ある $e \in \mathbb{Z}$ が存在して $\underline{n}' = p^e \underline{n}''$ となるとき $\underline{n}' \sim \underline{n}''$ と書く．これは $I(\underline{n})$ 上に同値関係を定める．p 乗 Frobenius 関係式より，$\underline{n}' \sim \underline{n}''$ ならばこのような e に対して $\zeta(\underline{n}') = \zeta(\underline{n}'')^{p^e}$ であることが分かる．$\underline{n}$ に関する適当な条件の下で，定理 3.4 内の集合の元の間には深さが同じものたちの間の p 乗 Frobenius 関係式しか関係がないと考えられる．つまり，等号

$$\operatorname{tr.deg}_{\overline{K}} \overline{K}(\widetilde{\pi}, \zeta(\underline{n}') | \underline{n}' \in I(\underline{n})) = 1 + \#(I(\underline{n})/\sim) \tag{3.1}$$

が成立すると期待される．$n_1, \ldots, n_d \geq 1$ が $q-1$ で割れずに相異なるとしても，等号 (3.1) は一般に成立しないことに注意する．例えば，$n_1 + n_2 \leq q$ のときには定理 2.2 より

$$(\zeta(n_1)\zeta(n_2) - \zeta(n_1, n_2) - \zeta(n_1 + n_2))^p = \zeta(pn_2, pn_1)$$

となり，$\underline{n} = (n_1, n_2, pn_2, pn_1, n_1 + n_2)$ に対して等号 (3.1) が成立しない．しかし，$d = 2$ のときは定理 3.4 の証明を少し修正するだけで等号 (3.1) を示すことができる：

定理 3.5. $n_1, n_2 \geq 1$ を $q-1$ で割れない異なる正の整数とし，n_1/n_2 が p の整数冪であるとする．このとき，$\widetilde{\pi}, \zeta(n_1), \zeta(n_1, n_2)$ は $\overline{K}$ 上代数的独立である．

§4. t モチーフの周期による解釈

標数 0 のときの類似として，正標数多重ゼータ値は t モチーフと呼ばれるものの周期として実現される ([4])．t モチーフは Drinfeld 加群の高次元化である t 加群の双対概念として Anderson ([1]) によって定義された．t モチーフの周期は，Papanikolas の理論 ([15]) によって t モチーフに付随する淡中基本群と結び付く．この基本群を計算することで，周期の生成する体の超越次数を決定することができる．この節ではまず t モチーフとその周期，Papanikolas の理論について復習した後，実際に正標数多重ゼータ値がある t モチーフの周期として実現されることを見る．

t を θ とは独立な変数とし，$\mathbb{T} := \{f \in \mathbb{C}_\infty[\![t]\!] | f$ は $|t|_\infty \leq 1$ で収束 $\}$ を Tate 代数，$\mathbb{L}$ を $\mathbb{T}$ の商体とする．また，

$$\mathbb{E} := \left\{ \sum a_i t^i \in \mathbb{T} \middle| \lim_{i \to \infty} \sqrt[i]{|a_i|_\infty} = 0,\ [K_\infty(a_0, a_1, \dots) : K_\infty] < \infty \right\}$$

とおく．$\mathbb{E}$ の元の収束半径は無限大で，t に θ を代入した値は K_∞ 上代数的であることに注意する．Laurent 冪級数 $f = \sum a_i t^i \in \mathbb{C}_\infty(\!(t)\!)$ と整数 $n \in \mathbb{Z}$ に対して，$f^{(n)} := \sum a_i^{q^n} t^i$ とおく．$\overline{K}(t)$ や $\mathbb{L}$ はこの作用で閉じていることが分かる．また，Frobenius 作用を $\sigma(f) := f^{(-1)}$ で定義する．σ による $\mathbb{L}$ の固定部分は $\mathbb{F}_q(t)$ と一致する．

$(\overline{K}(t), \sigma)$ 上のエタール φ 加群を ($\overline{K}$ 上の) t **モチーフ**[1]という．つまり，t モチーフとは有限次元 $\overline{K}(t)$ 線型空間 M と σ 半線型な全単射 $\varphi\colon M \to M$ の組 (M, φ) のことである．以下では φ を省略し，単に M で表す．t モチーフの間の射は，$\overline{K}(t)$ 線型写像で各 φ の作用と可換なものとする．t モチーフ M と M' のテンソル積を，底空間として $M \otimes_{\overline{K}(t)} M'$ で，φ の作用を $\varphi(x \otimes x') := \varphi(x) \otimes \varphi(x')$ で定義する．t モチーフ M の **Betti 実現**を

$$\omega(M) = M^B := (\mathbb{L} \otimes_{\overline{K}(t)} M)^{\sigma \otimes \varphi = 1}$$

により定義する．ここで，$(-)^{\sigma \otimes \varphi = 1}$ は $\sigma \otimes \varphi$ の固定部分を表す．このとき，自然な単射

$$\mathbb{L} \otimes_{\mathbb{F}_q(t)} M^B \hookrightarrow \mathbb{L} \otimes_{\overline{K}(t)} M$$

が得られる．これが全単射のとき，つまり $\dim_{\mathbb{F}_q(t)} M^B = \dim_{\overline{K}(t)} M$ のとき，M は**リジッド解析的自明** (**rigid analytically trivial**) であるという．このとき，$\mathbb{L} \otimes_{\overline{K}(t)} M$ 内において，M^B の $\mathbb{F}_q(t)$ 基底を M の $\overline{K}(t)$ 基底に移す表現行列 $\Psi = (\Psi_{ij}) \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{L})$ が存在する (r は M の $\overline{K}(t)$ 上の次元)．Ψ は $\mathrm{GL}_r(\overline{K}(t)) \backslash \mathrm{GL}_r(\mathbb{L}) / \mathrm{GL}_r(\mathbb{F}_q(t))$ において

[1]正確にはここで述べるものはプレ t モチーフと呼ばれるものであり，t モチーフは本来 $\overline{K}[t]$ 上の対象である．また，q^{-1} 乗ではなく q 乗を使ったものを t モチーフと呼び，ここでの意味のものを双対 t モチーフと呼ぶ場合もある．

well-defined である．後で述べるように，各成分 Ψ_{ij} は $\mathbb{E}$ に含まれる．ここに $t=\theta$ を代入した値 $\Psi_{ij}(\theta)\in\mathbb{C}_\infty$ を M の**周期**という．

リジッド解析的自明な t モチーフ全体の成す圏 $\mathcal{C}$ は，上記のようにテンソル積を定めることにより，ω をファイバー関手とする $\mathbb{F}_q(t)$ 上のニュートラル淡中圏となる (例えば [9, Definition 2.19] 参照)．$\mathbb{F}_q(t)$ 代数 R に対して $\omega_R(M):=R\otimes_{\mathbb{F}_q(t)}\omega(M)$ とする．$G(R):=\mathrm{Aut}^{\otimes}(\omega_R)$ を加法関手 ω_R の自己同型でテンソル積と可換なもののなす群とすると，G は $\mathbb{F}_q(t)$ 上のアファイン群スキームで，ω は圏同値 $\mathcal{C}\to\mathbf{Rep}_{\mathbb{F}_q(t)}(G)$ を誘導する (淡中双対性，[9, Theorem 2.11])．G を $\mathcal{C}$ の淡中基本群という．$M\in\mathcal{C}$ に対して，$\mathcal{C}_M$ を M から直和，テンソル積，双対，部分商によって作られる対象全体の成す $\mathcal{C}$ の充満部分圏とする．これも $\omega|_{\mathcal{C}_M}$ をファイバー関手とするニュートラル淡中圏となる．その淡中基本群を G_M とすると，双対性から代数群の間の全射 $G\twoheadrightarrow G_M$ が得られる．$\mathbb{F}_q(t)$ 代数 R に対して $G_M(R)$ の元は $\omega_R(M)=R\otimes_{\mathbb{F}_q(t)}M^B$ への作用で決まるから，G_M は $\mathrm{GL}_{\mathbb{F}_q(t)}(M^B)$ の閉部分群スキームとなる．また，$M'\in\mathcal{C}_M$ のときには代数群の間の全射 $G_M\twoheadrightarrow G_{M'}$ が得られる．

次に M の基底 $\mathbf{m}\in\mathrm{Mat}_{1\times r}(M)$ を固定した場合を考える．このとき $\varphi(\mathbf{m})=\Phi\mathbf{m}$ となる φ の表現行列 $\Phi\in\mathrm{GL}_r(\overline{K}(t))$ が存在する．逆に r 次の正則行列 $\Phi\in\mathrm{GL}_r(\overline{K}(t))$ に対して，M_Φ を $\overline{K}(t)$ 線型空間としては $\overline{K}(t)^r$ で，その標準基底 $\mathbf{m}$ に対して $\varphi(\mathbf{m})=\Phi\mathbf{m}$ で定まる t モチーフとして作れる．M_Φ がリジッド解析的自明であるための必要十分条件は，Frobenius 方程式

$$\Psi^{(-1)}=\Phi\Psi,\quad \Psi\in\mathrm{GL}_r(\mathbb{L})$$

が解 Ψ を持つことである．このとき Ψ を Φ の**基本行列**という．これは，Ψ が M_Φ^B のある基底を M_Φ の基底 $\mathbf{m}$ に移すことと同値であることが確かめられる．以下，このような Φ と Ψ を固定する．$\Psi_1\in\mathrm{GL}_r(\mathbb{L}\otimes_{\overline{K}(t)}\mathbb{L})$ (resp. $\Psi_2\in\mathrm{GL}_r(\mathbb{L}\otimes_{\overline{K}(t)}\mathbb{L})$) を $(\Psi_1)_{ij}=\Psi_{ij}\otimes 1$ (resp. $(\Psi_2)_{ij}=1\otimes\Psi_{ij}$) で定まる行列とし，$\widetilde{\Psi}:=\Psi_1^{-1}\Psi_2\in\mathrm{GL}_r(\mathbb{L}\otimes_{\overline{K}(t)}\mathbb{L})$ とする．$X=(X_{ij})$ を $r\times r$ 個の変数からなる r 次行列とし，代入写像

$$\nu\colon \mathbb{F}_q(t)[X_{11},X_{12},\dots,X_{rr},1/\det X]\to\mathbb{L}\otimes_{\overline{K}(t)}\mathbb{L};\ X_{ij}\mapsto\widetilde{\Psi}_{ij}$$

を考える．Ψ から定まる $\mathbb{F}_q(t)$ 上の代数多様体を

$$\begin{aligned}G_\Psi&:=\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_q(t)[X_{11},X_{12},\dots,X_{rr},1/\det X]/\operatorname{Ker}\nu)\\&=\{(x_{ij})\in\mathrm{GL}_{r/\mathbb{F}_q(t)}\,|\,f(x_{ij})=0\ (f\in\operatorname{Ker}\nu)\}\end{aligned}$$

とおく．これは $\mathbb{L}\otimes_{\overline{K}(t)}\mathbb{L}$ 値点 $\widetilde{\Psi}\colon\mathrm{Spec}(\mathbb{L}\otimes_{\overline{K}(t)}\mathbb{L})\to\mathrm{GL}_{r/\mathbb{F}_q(t)}$ の像の Zariski 閉包と一致する．定義より，もし各成分 $\widetilde{\Psi}_{ij}$ の間に $\mathbb{F}_q(t)$ 上の代数的関係があったとすると，G_Ψ の各成分も同様の関係式を満たすことが分かる．$\mathbb{F}_q(t)$ 代数 R に対して

$$G_\Psi(R)\to G_{M_\Phi}(R);\ \gamma\mapsto(\mathbf{f}\cdot\Psi^{-1}\mathbf{m}\mapsto\mathbf{f}\gamma^{-1}\cdot\Psi^{-1}\mathbf{m})$$

として写像が定まる．ここで，$\mathbf{f}$ は R^r 全体を走る．

定理 4.1 ([15, Theorem 4.3.1, 4.5.10, 5.2.2]). Φ と Ψ を上記のようにとる.

(1) G_Ψ は $\mathrm{GL}_{r/\mathbb{F}_q(t)}$ のスムーズな部分群スキームで，射 $G_\Psi \to G_{M_\Phi}$ は $\mathbb{F}_q(t)$ 上の群スキームの間の同型となる.

(2)

$$\dim G_\Psi = \mathrm{tr.deg}_{\overline{K}(t)}\, \overline{K}(t)(\Psi_{11}, \Psi_{12}, \ldots, \Psi_{rr})$$

(3) $\Phi \in \mathrm{Mat}_{r\times r}(\overline{K}[t])$, $\Psi \in \mathrm{Mat}_{r\times r}(\mathbb{T})$，ある $c \in \overline{K}^\times$ と非負整数 $s \geq 0$ に対して $\det\Phi = c(t-\theta)^s$ とする．このとき $\Psi \in \mathrm{Mat}_{r\times r}(\mathbb{E})$ となり，

$$\mathrm{tr.deg}_{\overline{K}(t)}\, \overline{K}(t)(\Psi_{11}, \Psi_{12}, \ldots, \Psi_{rr}) = \mathrm{tr.deg}_{\overline{K}}\, \overline{K}(\Psi_{11}(\theta), \Psi_{12}(\theta), \ldots, \Psi_{rr}(\theta)).$$

が成り立つ.

例 4.2. 1 行 1 列の行列 $[t-\theta]$ で定義される t モチーフ $C := M_{[t-\theta]}$ を **Carlitz t モチーフ**という.

$$\Omega(t) := (-\theta)^{-\frac{q}{q-1}} \prod_{i=1}^{\infty} \left(1 - \frac{t}{\theta^{q^i}}\right) \in \overline{K_\infty}[\![t]\!]$$

とおく．すると，$\Omega(t) \in \mathbb{E}$ となることが分かり，定義から明らかに Frobenius 方程式

$$\Omega^{(-1)} = (t-\theta)\Omega$$

を満たす．従って，C はリジッド解析的自明な t モチーフで，$[\Omega]$ は $[t-\theta]$ の基本行列となる．また，

$$\Omega(\theta) = \frac{1}{\tilde{\pi}}$$

となることが分かるので，$1/\tilde{\pi}$ は前述の意味で C の周期となる．Ω は無限個の零点を持つので $\overline{K}(t)$ 上超越的であり，定理 4.1 より $G_C \cong G_{[\Omega]} = \mathbb{G}_m$ かつ $\mathrm{tr.deg}_{\overline{K}}\, \overline{K}(\tilde{\pi}) = \mathrm{tr.deg}_{\overline{K}(t)}\, \overline{K}(t)(\Omega) = 1$ となる.

定理 4.1 の (3) は，モチーフの世界で直接得られる基本行列 Ψ の各成分が生成する体の超越次数が，数の世界 $\mathbb{C}_\infty$ に落としても小さくならないことを保証している．これは，次の **ABP 判定規準** (**ABP-criterion**) と呼ばれる定理から示される.

定理 4.3 ([2, Theorem 3.1.1]). 行列 $\Psi \in \mathrm{Mat}_{r\times r}(\overline{K}[t])$ を，ある $c \in \overline{K}^\times$ と非負整数 $s \geq 0$ に対して $\det\Phi = c(t-\theta)^s$ を満たすものとする．列ベクトル $\psi \in \mathrm{Mat}_{r\times 1}(\mathbb{E})$ が *Frobenius* 方程式 $\psi^{(-1)} = \Phi\psi$ を満たしているとする．このとき，$\rho\psi(\theta) = 0$ を満たす任意の $\rho \in \mathrm{Mat}_{1\times r}(\overline{K})$ に対して，ある $P \in \mathrm{Mat}_{1\times r}(\overline{K}[t])$ が存在して，$P(\theta) = \rho$ かつ $P\psi = 0$ を満たす.

ABP 判定規準は，Frobenius 方程式を満たす ψ に対して，$t=\theta$ を代入した $\psi(\theta)$ の各成分の間に $\overline{K}$ 上の線型関係式が存在すれば，それは ψ の各成分の間の $\overline{K}[t]$ 上の関係式

に持ち上がるということを述べている．これはとても強力で，定理 4.1 の (3) の他にも，例えば定理 3.2 の証明においても ABP 判定規準が本質的な役割を果たしている．

次に，実際に正標数多重ゼータ値が t モチーフの周期として現れることを見る (詳しくは [3]，[4] 参照)．$\underline{n} = (n_1, \ldots, n_d)$ を正の整数からなるインデックス，$\underline{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in (\overline{K}[t])^d$ を多項式の組で，各 i に対して $|\alpha_i|_\infty < |\theta|_\infty^{\frac{n_i q}{q-1}}$ を満たすものとする．但し多項式 $\alpha = \sum_j a_j t^j \in \overline{K}[t]$ に対して，$|\alpha|_\infty := \max_j |a_j|_\infty$ とおく．冪級数

$$L_{\underline{\alpha},\underline{n}}(t) := \sum_{i_1 > \cdots > i_d \geq 0} \frac{\alpha_1^{(i_1)} \cdots \alpha_d^{(i_d)}}{((t-\theta^q)\cdots(t-\theta^{q^{i_1}}))^{n_1} \cdots ((t-\theta^q)\cdots(t-\theta^{q^{i_d}}))^{n_d}} \in \overline{K_\infty}[\![t]\!]$$

は $|t|_\infty < |\theta|_\infty^q$ で収束し，Frobenius 方程式

$$L_{\underline{\alpha},\underline{n}}^{(-1)} = \frac{\alpha_d^{(-1)}}{(t-\theta)^{n_1+\cdots+n_{d-1}}} L_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_{d-1}),(n_1,\ldots,n_{d-1})} + \frac{L_{\underline{\alpha},\underline{n}}}{(t-\theta)^{n_1+\cdots+n_d}}$$

を満たす．ここで，$L_{\emptyset,\emptyset} := 1$ とおいた．Anderson と Thakur は [3] において，ある多項式 $H_{n-1} \in \mathbb{F}_q[\theta, t]$ が存在して，全ての $i \geq 0$ に対して

$$(H_{n-1}\Omega^n)^{(i)}(\theta) = \frac{\Gamma_n S_i(n)}{\widetilde{\pi}^n}$$

を満たし，$|H_{n-1}|_\infty < |\theta|_\infty^{\frac{nq}{q-1}}$ となることを示した．ここで，

$$S_i(n) := \sum_{\deg(a)=i} \frac{1}{a^n}$$

は Carlitz ゼータ値の次数 i に関する部分和である．インデックス $\underline{n} = (n_1, \ldots, n_d)$ に対して，$H(\underline{n}) := (H_{n_1-1}, \ldots, H_{n_d-1})$ とすると，

$$L_{H(\underline{n}),\underline{n}}(\theta) = \Gamma_{n_1} \cdots \Gamma_{n_d} \zeta(\underline{n})$$

が得られる[2]．

$$\Phi_{\underline{\alpha}}(\underline{n}) := \begin{bmatrix} (t-\theta)^{n_1+\cdots+n_d} & & & & \\ \alpha_1^{(-1)}(t-\theta)^{n_1+\cdots+n_d} & (t-\theta)^{n_2+\cdots+n_d} & & & \\ & \alpha_2^{(-1)}(t-\theta)^{n_2+\cdots+n_d} & \ddots & & \\ & & \ddots & (t-\theta)^{n_d} & \\ & & & \alpha_d^{(-1)}(t-\theta)^{n_d} & 1 \end{bmatrix}$$

とおく．また，行列 $\Psi_{\underline{\alpha}}(\underline{n}) := (\Psi_{\underline{\alpha}}(\underline{n})_{ij})$ を

$$\Psi_{\underline{\alpha}}(\underline{n})_{ij} := \Omega^{n_j+\cdots+n_d} L_{\alpha_j,\ldots,\alpha_{i-1},n_j,\ldots,n_{i-1}} \quad (1 \leq j \leq i \leq d+1),$$

[2] $\underline{\alpha} \in \overline{K}^d$ のときには，$\mathrm{Li}_{\underline{n}}(\underline{\alpha}) := L_{\underline{\alpha},\underline{n}}(\theta)$ は Carlitz 多重ポリログと呼ばれる．

$\Psi_{\underline{\alpha}}(\underline{n})_{ij} := 0$ $(i < j)$ として定める．すると，$\Psi_{\underline{\alpha}}(\underline{n})^{(-1)} = \Phi_{\underline{\alpha}}(\underline{n})\Psi_{\underline{\alpha}}(\underline{n})$ となる．ここで，$\Phi(\underline{n}) := \Phi_{H(\underline{n})}(\underline{n})$，$\Psi(\underline{n}) := \Psi_{H(\underline{n})}(\underline{n})$ とおくと，$1 \leq j \leq i \leq d+1$ に対して

$$\Psi(\underline{n})_{ij}(\theta) = \frac{\Gamma_{n_j} \cdots \Gamma_{n_{i-1}} \zeta(n_j, \ldots, n_{i-1})}{\widetilde{\pi}^{n_j + \cdots + n_d}}$$

となる．従って，行列 $\Phi(\underline{n})$ の基本行列としてこの $\Psi(\underline{n})$ が得られ，その周期として $\widetilde{\pi}$ 及び $\zeta(n_j, \ldots, n_{i-1})$ $(1 \leq j \leq i \leq d+1)$ が現れる．

§5. 代数的独立性の証明

定理 3.3 と 3.4 の証明の概略を述べる．証明の基本方針は，調べたい正標数多重ゼータ値が基本行列 (に $t = \theta$ を代入した周期) の左下にくるような前述の $\Phi(\underline{n})$ と $\Psi(\underline{n})$ を取り，付随する代数群の次元を調べる方法である．定理 4.1 により，この次元が求めたい超越次数となる．この際，t モチーフの淡中基本群としての性質は，淡中双対性により部分や商の t モチーフに付随する基本群への全射を誘導することに用い，基本行列から直接定義される代数群としての性質は，具体的に一般線型群のどのような部分代数群に含まれているかということと，誘導される基本群の間の射がその表示によってどういう射となっているかを見るのに用いる．

定理 *3.3* の証明． 前節の記法の下，$\Phi := \Phi(n,n) \in \mathrm{GL}_3(\overline{K}(t))$ と $\Psi := \Psi(n,n) \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{L})$ を考える．すると前述のように，$\Psi^{(-1)} = \Phi\Psi$ を満たし，t モチーフ $M := M_\Phi$ はリジッド解析的自明となる．定理 4.1 より $\dim G_M = \mathrm{tr.deg}_{\overline{K}}\, \overline{K}(\widetilde{\pi}, \zeta(n), \zeta(n,n))$ となる．Φ' と Ψ' をそれぞれ Φ 及び Ψ の右下 2 行 2 列の行列とすると，これらも Frobenius 方程式を満たし，t モチーフ $M' := M_{\Phi'}$ はリジッド解析的自明となる．M' は M の商なので，淡中双対性より代数群の間の全射 $G_M \twoheadrightarrow G_{M'}$ が得られる．一方，定理 4.1 における同一視により，a, x, y を座標変数とすると

$$G_M \cong G_\Psi \subset \left\{ \begin{bmatrix} a^2 & & \\ ax & a & \\ y & x & 1 \end{bmatrix} \right\} \quad \text{及び} \quad G_{M'} \cong G_{\Psi'} = \left\{ \begin{bmatrix} a & \\ x & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

となる．ここで，最後の等号は $\dim G_{\Psi'} = \mathrm{tr.deg}_{\overline{K}}\, \overline{K}(\widetilde{\pi}, \zeta(n)) = 2$ より．また，この同一視の下で全射 $G_M \twoheadrightarrow G_{M'}$ は各 3 行 3 列の行列に対して右下 2 行 2 列を対応させるものとなることが分かる．ここで，$\dim G_M = 2$ と仮定する．$p = 2$ のとき，このような G_M はないことが分かるので，このときは常に $\dim G_M = 3$ となる．以下では $p \geq 3$ とする．このとき，ある $c_0 \in \mathbb{F}_q(t)$ が存在して

$$G_\Psi = \left\{ \begin{bmatrix} a^2 & & \\ ax & a & \\ \frac{1}{2}(c_0(a^2-1)+x^2) & x & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

となることが分かる．ここから G_Ψ の定義に戻ると，Ψ の成分の間の $\overline{K}(t)$ 上の関係式が得られる．そこで $t=\theta$ (正確には十分大きな $N>0$ に対して $t=\theta^N$) を代入することで，関係式

$$K_\infty \ni \zeta(n)^2 - 2\zeta(n,n) = \frac{c_0(\theta)}{\Gamma_n^2}\widetilde{\pi}^{2n} \in K^\times \cdot \widetilde{\pi}^{2n}$$

が得られる．$\widetilde{\pi}$ の定義から，もし $2n$ が $q-1$ で割れないならばこれは矛盾である． □

定理 *3.4* の証明． 記号の煩雑さを避けるため，$d=2$ の場合のみを説明する．$\Phi := \Phi(n_1,n_2)$，$\Psi := \Psi(n_1,n_2)$ とおく．すると $([\Omega]\oplus\Psi)^{(-1)} = ([t-\theta]\oplus\Phi)([\Omega]\oplus\Psi)$ が成り立つので，t モチーフ $M := M_{[t-\theta]\oplus\Phi} = C\oplus M_\Phi$ はリジッド解析的自明となる．ここで，「正規化」のために Carlitz t モチーフを付け加えている．また，

$$\Phi' := \begin{bmatrix} (t-\theta)^{n_2}\Phi(n_1) & \\ & \Phi(n_2) \end{bmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\overline{K}(t)) \times \mathrm{GL}_2(\overline{K}(t)) \subset \mathrm{GL}_4(\overline{K}(t))$$

及び

$$\Psi' := \begin{bmatrix} \Omega^{n_2}\Psi(n_1) & \\ & \Psi(n_2) \end{bmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{L}) \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{L}) \subset \mathrm{GL}_4(\mathbb{L})$$

とおく．つまり Φ' と Ψ' はそれぞれ Φ 及び Ψ の左上 2 行 2 列と右下 2 行 2 列を合わせた行列である．これらに $t-\theta$ 及び Ω を付け加えたものも Frobenius 方程式を満たし，t モチーフ $M' := M_{[t-\theta]\oplus\Phi'} = C\oplus M_{\Phi'}$ はリジッド解析的自明となる．M' は M の商，C は M と M' の部分であるから，淡中双対性より代数群の間の全射 $G_M \twoheadrightarrow G_{M'}$，$G_M \twoheadrightarrow G_C$，$G_{M'} \twoheadrightarrow G_C$ が得られる．一方，定理 4.1 における同一視の下，

$$G_M \cong G_{[\Omega]\oplus\Psi} \subset \left\{ \begin{bmatrix} a & & & \\ & a^{n_1+n_2} & & \\ & x_{21} & a^{n_2} & \\ & x_{31} & x_{32} & 1 \end{bmatrix} \right\}, \quad G_{M'} \cong G_{[\Omega]\oplus\Psi'} = \left\{ \begin{bmatrix} a & & & \\ & a^{n_1+n_2} & & \\ & x_{21} & a^{n_2} & \\ & & & a^{n_2} \\ & & & x_{32} & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

及び $G_C \cong G_{[\Omega]} = \mathbb{G}_m$ となる．ここで，最初の等号は

$$\dim G_{[\Omega]\oplus\Psi'} = \mathrm{tr.deg}_{\overline{K}}\, \overline{K}(\widetilde{\pi}, \zeta(n_1), \zeta(n_2)) = 3$$

であることから，2 つ目の等号は例 4.2 から従う．この同一視の下で上述の全射は，$G_M \twoheadrightarrow G_{M'}$ は $(4,2)$ 成分 (x_{31} 座標) 以外をそのまま対応させる写像，$G_M \twoheadrightarrow G_C$ 及び $G_{M'} \twoheadrightarrow G_C$ は各行列に対して $(1,1)$ 成分 a を対応させる写像となる．G_C への射影の核は

$$V := \mathrm{Ker}(G_M \twoheadrightarrow G_C) \subset \left\{ \begin{bmatrix} 1 & & \\ x_{21} & 1 & \\ x_{31} & x_{32} & 1 \end{bmatrix} \right\}, \quad \mathrm{Ker}(G_{M'} \twoheadrightarrow G_C) \cong {\mathbb{G}_a}^2$$

であり，$G_M \twoheadrightarrow G_{M'}$ から誘導される全射は $V \twoheadrightarrow \mathbb{G}_a{}^2; \begin{bmatrix} 1 & & \\ x_{21} & 1 & \\ x_{31} & x_{32} & 1 \end{bmatrix} \mapsto (x_{21}, x_{32})$ である．ここで，$\dim G_M = 3$ と仮定して矛盾を導く．このとき $\dim V = 2$ となり，$\dim \mathrm{Ker}(V \twoheadrightarrow \mathbb{G}_a{}^2) = 0$ となるが，実は $\mathrm{Ker}(V \twoheadrightarrow \mathbb{G}_a{}^2) = \{1\}$ であることが分かる．今，V は非可換であることに注意する．そのため，V の元 $X = \begin{bmatrix} 1 & & \\ x_{21} & 1 & \\ x_{31} & x_{32} & 1 \end{bmatrix}$ への V の元 $A = \begin{bmatrix} 1 & & \\ a_{21} & 1 & \\ a_{31} & a_{32} & 1 \end{bmatrix}$ による随伴作用は元の X とずれる．つまり

$$X^{-1} \cdot A^{-1} X A = \begin{bmatrix} 1 & & \\ 0 & 1 & \\ a_{21}x_{32} - a_{32}x_{21} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

となるが，一方で右辺は $\mathrm{Ker}(V \twoheadrightarrow \mathbb{G}_a{}^2) = \{1\}$ に入っているので $a_{21}x_{32} - a_{32}x_{21} = 0$ となる．ここで，$\mathbb{G}_a{}^2$ への全射性から $x_{21}, x_{32}, a_{21}, a_{32}$ は任意にとれる．これは矛盾であり，よって $\dim G_M = 4$ となる．従って $\mathrm{tr.deg}_{\overline{K}}\, \overline{K}(\tilde{\pi}, \zeta(n_1), \zeta(n_2), \zeta(n_1, n_2)) = 4$ となる． □

References

[1] G. W. Anderson, *t-motives*, Duke Math. J. **53** (1986) 457–502.

[2] G. W. Anderson, W. D. Brownawell, M. A. Papanikolas, *Determination of the algebraic relations among special Γ-values in positive characteristic*, Ann. of Math. **160** (2004) 237–313.

[3] G. W. Anderson, D. S. Thakur, *Tensor powers of the Carlitz module and zeta values*, Ann. of Math. **132** (1990) 159–191.

[4] G. W. Anderson, D. S. Thakur, *Multizeta values for $\mathbb{F}_q[t]$, their period interpretation, and relations between them*, Int. Math. Res. Not. IMRN (2009), no. 11, 2038–2055.

[5] L. Carlitz, *On certain functions connected with polynomials in a Galois field*, Duke. Math. J. **1** (1935) 137-168.

[6] C.-Y. Chang, *Linear independence of monomials of multizeta values in positive characteristic*, Compos. Math. **150** (2014), no. 11, 1789–1808.

[7] C.-Y. Chang, *On characteristic p multizeta values*, Algebraic number theory and related topics 2012, 177–202, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, **B51**, Res. Inst. Math. Sci. (RIMS), Kyoto, 2014.

[8] C.-Y. Chang, J. Yu, *Determination of algebraic relations among special zeta values in positive characteristic*, Adv. Math. **216** (2007) 321–345.

[9] P. Deligne, J. S. Milne, *Tannakian categories*, Hodge Cycles, Motives and Shimura Varieties, Lecture Notes in Math. **900**, Springer-Verlag, Berlin and New York (1982) 101–228.

[10] D. Goss, *v-adic zeta functions, L-series and measures for function fields*, Invent. Math. **55** (1979) 107–119.

[11] D. Goss, *Basic structures of function field arithmetic*, Springer-Verlag, Berlin, 1996.

[12] J. A. Lala Rodriguez, *Relations between multizeta values in characteristic p*, J. Number Theory **131** (2011) 2081–2099.

[13] Y. Mishiba, *Algebraic independence of the Carlitz period and the positive characteristic multizeta values at n and (n, n)*, Proc. Amer. Math. Soc. **143** (2015), no. 9, 3753–3763.

[14] Y. Mishiba, *On algebraic independence of certain multizeta values in characteristic p*, preprint.

[15] M. A. Papanikolas, *Tannakian duality for Anderson-Drinfeld motives and algebraic independence of Carlitz logarithms*, Invent. Math. **171** (2008) 123–174.

[16] D. S. Thakur, *Function Field Arithmetic*, World Scientific Pub., 2004.

[17] D. S. Thakur, *Power sums with applications to multizeta and zeta zero distribution for $\mathbb{F}_q[t]$*, Finite Fields Appl. **15** (2009), no. 4, 534–552.

[18] D. S. Thakur, *Relations between multizeta values for $\mathbb{F}_q[t]$*, Int. Math. Res. Not. IMRN (2009), no. 12, 2318–2346.

[19] D. S. Thakur, *Shuffle relations for function field multizeta values*, Int. Math. Res. Not. IMRN (2010), no. 11, 1973–1980.

[20] J. Yu, *Transcendence and special zeta values in characteristic p*, Ann. of Math. **134** (1991) 1–23.